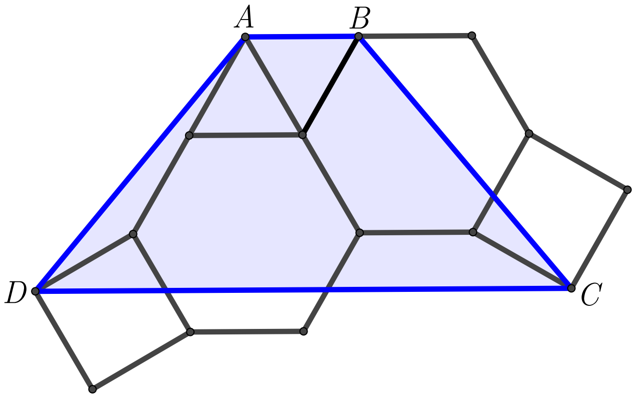
10. Irańska Olimpiada Geometryczna

Poziom podstawowy

20 października 2023

Upublicznianie poniższych treści jest zabronione do momentu udostępnienia ich na oficjalnej stronie olimpiady: igo-official.com.

Zadanie 1. Wszystkie wielokąty na poniższym rysunku są foremne. Wykaż, że $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.



Zadanie 2. W trójkącie ABC zachodzą równości $AB = AC$ i $\angle CAB = 30°$. Na bokach AB i AC leżą punkty, odpowiednio, L i M, przy czym spełniony jest warunek $AL = CM$. Na odcinku AB leży taki punkt K, że $\angle AMK = 45°$. Wykaż, że jeśli $\angle LMC = 75°$, to $KM + ML = BC$.

Zadanie 3. Niech $ABCD$ będzie kwadratem o boku długości 1. Ile punktów P leżących wewnątrz kwadratu (poza jego bokami) spełnia następującą własność: kwadrat $ABCD$ można podzielić na 10 trójkątów o równym polu tak, że P jest jednym z wierzchołków każdego z nich?

Zadanie 4. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Oznaczmy przez E punkt przecięcia jego przekątnych. Załóżmy, że $CD = BC = BE$. Wykaż, że $AD + DC \geqslant AB$.

Zadanie 5. W pewnym wielokącie narysowano kilka nieprzecinających się nawzajem przekątnych, dzielących go na trójkąty. Dla każdych dwóch uzyskanych w ten sposób trójkątów o wspólnym boku, suma ich kątów leżących naprzeciwko tego boku jest większa niż 180°.

a) Wykaż, że początkowy wielokąt jest wypukły.

b) Wykaż, że okrąg opisany na dowolnym z tych trójkątów zawiera cały wielokąt.

Czas trwania konkursu: 4 godziny.
Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.

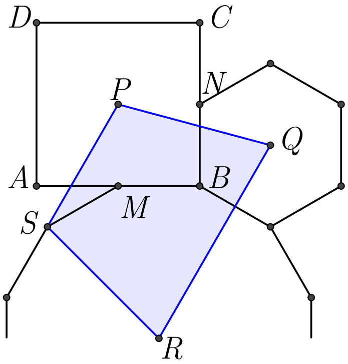
10. Irańska Olimpiada Geometryczna

Poziom średniozaawansowany

20 października 2023

Upublicznianie poniższych treści jest zabronione do momentu udostępnienia ich na oficjalnej stronie olimpiady: igo-official.com.

Zadanie 1. Niech punkty M i N będą środkami boków, odpowiednio, AB i BC kwadratu $ABCD$. W sposób pokazany na rysunku narysowano dwa wielokąty foremne: sześciokąt i dwunastokąt. Oznaczmy środki tych trzech wielokątów przez P, Q, R. Wykaż, że czworokąt $PQRS$ jest wpisany w okrąg.



Zadanie 2. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$ i punkt P leżący w jego wnętrzu. Załóżmy ponadto, że $BCEF$ jest kwadratem, a trójkąty ABP i PCD są prostokątne równoramienne z kątami prostymi przy wierzchołkach, odpowiednio, B i C. Niech G będzie punktem przecięcia prostych AF i DE. Wykaż, że prosta GP jest prostopadła do BC.

Zadanie 3. Na trójkącie ABC spełniającym warunek $\angle ABC = 3\angle BCA$ opisano okrąg ω. Dwusieczna kąta BAC przecina ω i BC w punktach, odpowiednio, M i D. Na prostej MC znajduje się taki punkt E, że punkt M leży między C i E oraz odcinek ME ma długość równą promieniowi okręgu ω. Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ACE i BDM są styczne.

Zadanie 4. Niech ABC będzie trójkątem o ortocentrum H. Punkt P jest środkiem łuku BAC okręgu opisanego na ABC. Wybierzmy punkty Q, S w taki sposób, że $HAPQ$ i $SACQ$ są równoległobokami. Niech T będzie środkiem odcinka AQ, a R punktem przecięcia prostych SQ i PB. Wykaż, że proste AB, SH i TR przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 5. Na płaszczyźnie danych jest n punktów. Spośród wszystkich czworokątów o wierzchołkach w tych punktach co najmniej 99% jest wypukłych. Czy istnieje na płaszczyźnie wielokąt wypukły o wierzchołkach w co najmniej 90% z wybranych punktów?

Czas trwania konkursu: $4,5$ godziny.
Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.

10. Irańska Olimpiada Geometryczna

Poziom zaawansowany

20 października 2023

Upublicznianie poniższych treści jest zabronione do momentu udostępnienia ich na oficjalnej stronie olimpiady: igo-official.com.

Zadanie 1. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P. Punkty D i E leżące na odcinkach, odpowiednio, AB i AC spełniają warunek $BC \parallel DE$. Punkty K i L leżą na odcinkach, odpowiednio, PD i PE w taki sposób, że punkty A, D, E, K, L leżą na jednym okręgu. Wykaż, że punkty B, C, K, L również leżą na jednym okręgu.

Zadanie 2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Dwusieczne BI, CI przecinają boki AC, AB odpowiednio w punktach X, Y. Niech M będzie środkiem łuku BAC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Załóżmy, że czworokąt $MXIY$ jest wpisany w okrąg. Wykaż, że pole czworokąta $MBIC$ jest równe polu pięciokąta $BCXIY$.

Zadanie 3. Na odcinku S o długości L wybrano punkty $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dla każdego i niech c_i będzie pewnym kołem o środku w A_i i promieniu nie przekraczającym 1. Niech C będzie sumą mnogościową wszystkich c_i. Wykaż, że obwód C jest mniejszy od $4L + 8$.
Uwaga: Promienie kół c_i niekoniecznie są równe.

Zadanie 4. W trójkącie ABC dwusieczne kątów ABC i BCA przecinają boki AC i AB w punktach, odpowiednio, E i F. Niech I to przecięcie prostych BE, CF oraz niech D będzie rzutem prostokątnym punktu I na prostą BC. Niech M i N to ortocentra trójkątów, odpowiednio, AIF i AIE. Proste EM i FN przecinają się w punkcie P. Oznaczmy przez: X – środek boku BC oraz Y – punkt leżący na prostej AD taki, że $XY \perp IP$. Wykaż, że prosta AI połowi odcinek XY.

Zadanie 5. Niech punkty M i N będą środkami boków AC i AB trójkąta ABC, a D będzie rzutem prostokątnym A na bok BC. Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech okręgi opisane na trójkątach BOC, DMN przecinają się w punktach R, T. Proste DT, DR przecinają prostą MN w punktach, odpowiednio, E i F. Proste CT i BR przecinają się w punkcie K. Na prostej KD leży taki punkt P, że PK jest dwusieczną kąta BPC. Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ART i PEF są styczne.

Czas trwania konkursu: $4,5$ godziny.
Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.